石井　亮　(いしい　あきら／ISHII, Akira)　教授

研　究　室　多元数理科学棟 302 号室　(内線 2544)

電子メール　akira141@hiroshima-u.ac.jp

所 属 学 会　日本数学会

研究テーマ

- 代数幾何学
- McKay 対応
- 導来圏

研究テーマの概要

最初に研究したのは，2 次元の有理二重点（クライン特異点）上の加群の変形についてでした．これは曲面の特異点がその上の層のモジュライ空間にどう影響するかという問題を具体例で調べようと始めたものでした．加群の変形空間として，A 型の場合は冪零多様体が現れ，一般の場合も中島の箙多様体の退化したパラメータに対応すると思われる空間が得られました．ただし私の扱った変形空間は，その座標環が冪零元を持つようなものであり，その扱いに少し苦労しました．

クライン特異点は商特異点，すなわちアフィン平面 $\mathbb{C}^2$ の有限群 $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ による商として得られるものです．クライン特異点の解消の幾何学的記述と有限群 G の表現論との間に成り立つ綺麗で不思議な関係が McKay により見出され，(その一般化も含めて)McKay 対応と呼ばれています．伊藤と中村は，McKay 対応が G-軌道のヒルベルト・スキーム (G-Hilb) というものを用いると自然に記述できることを示しました．私はこの G-Hilb やその一般化について，次のようにいくつかの研究をしました．

次元を一つ上げて，$\mathbb{C}^3$ の有限群 $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ による商を考えます．この時も G-Hilb は商特異点の良い解消（クレパント解消と呼ばれます）であることがわかっていました (Bridgeland-King-Reid)．しかし，2 次元の時と違って，クレパント解消は一つとは限りません．G-Hilb はその中の一つであるわけですが，他のクレパント解消も同様に扱うために，Craw 氏と共同で G-constellation というものを導入し，G が可換群の場合には任意のクレパント解消がそのモジュライ空間として実現できることを示しました．ここでは，導来圏というものとその間の関手である Fourier-向井変換というものが本質的に使われています．G が非可換の場合もやりたかったのですが，まだできていません．

また，主に植田一石氏とともに，ダイマー模型というものについて研究しました．これは，ある種の 3 次元特異点と関係がありますが，この関係は可換群 $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ に対する McKay 対応 の拡張として，弦理論の物理学者たちにより見出されたものです．ダイマー模型から非可換環が定まり，(ダイマー模型が良い場合は) その非可換環が導来圏というものを通じてある 3 次元の特異点と結びつくのです．これらを安直に高次元化しようとすると色々と難しくなりそうなのですが，何か良いアイデアはないものかと思っています．

このような流れで McKay 対応の研究をしていると，導来圏というものが重要な役割を果たしていることに気づきます．代数多様体の連接層の導来圏そのものの構造に関する研究もミラー対称性や双有理幾何学等様々な視点から面白く，上原氏や植田氏と特に A 型のクライン特異点の最小特異点解消の導来圏の場合に，自己圏同値のなす群や，Bridgeland 安定性条件の空間について結果を得ました．導来圏については，様々な興味深い現象があり，それらの理解を模索しています．

主要論文・著書

[1] A. Ishii, On the moduli of reflexive sheaves on a surface with rational double points, Math. Ann. **294** (1992), 125–150.

[2] A. Ishii, Versal deformation of reflexive modules over rational double points Math. Ann. **317** (2000), 239–262.

[3] A. Ishii, On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, J. Reine Angew. Math. **549** (2002), 79–106.

[4] A. Craw and A. Ishii, Flops of G-Hilb and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient, Duke Math. J. **124** (2004), 259–307.

[5] A. Ishii and H. Uehara, Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of A_n-singularities on surfaces, J. Differential Geom. **71** (2005), 385–435.

[6] A. Ishii, and K. Ueda, On moduli spaces of quiver representations associated with dimer models, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B9** (2008), 127–141.

[7] A. Ishii, K. Ueda and H. Uehara, Stability conditions on A_n-singularities, J. Differential Geom. **84** (2010), 87–126.

[8] A. Ishii, Y. Ito and N. Álvaro, On G/N-Hilb of N-Hilb, Kyoto J. Math. **53** (2013), 91–130.

[9] A. Ishii, and K. Ueda, Dimer models and the special McKay correspondence, Geom. Topol. **19** (2015), 3405–3466.

経歴

1993 年　京都大学大学院理学研究科博士後期課程単位取得退学
1993 年　京都大学理学部助手
2000 年　京都大学大学院工学研究科講師
2005 年　広島大学大学院理学研究科助教授（理学部担当）
2014 年　広島大学大学院理学研究科教授（総合科学部担当）
2018 年　名古屋大学大学院多元数理科学研究科教授

学生へのメッセージ

代数幾何を本格的に勉強するには，まずは

- Robin Hartshorne, Algebraic Geometry(Graduate Texts in Mathematics. 52), Springer, 1977

を読むのが良いと思います．あるいは，日本語の本で

- 宮西 正宜, 代数幾何学 (数学選書 10) , 裳華房, 1990

も良いかもしれません．その後は私の研究している事に近い方向であれば，例えば

- D. Huybrechts, Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry, Oxford Univ. Press，2006

などを読んでみるという事も考えられますが，上記に限らず，代数幾何学に関係していて面白いと思った題材を見つけてもらえれば，できるだけお付き合いしたいと思います．

例えば 2018 年度は，上記 Hartshorne の本については別の少人数クラスで聴講してもらい，石井の少人数クラスではまずは環論やホモロジー代数の基礎事項について学びつつ，その中で興味の持てそうな題材についてはより詳しく文献にあたってもらう，ということをしました．